Développement : Formule de STIRLING par le théorème central limite

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [LES] LESESVRE D., MONTAGNON P., *131 développements pour l'oral*, Dunod, 2020, p580 (plus précisément, page 585).

Pour les leçons :

- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Le but de ce développement est de démontrer, grâce au théorème central limite, **la formule de** STIRLING :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Lemme 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de POISSON de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Alors, $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\mathrm{d}t$.

PREUVE : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : t \longmapsto \mathbb{P}(Z_n > t)$. Appliquons le théorème de convergence dominée.

⋆ f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $f_n = 1 - F_{Z_n}$, où F_{Z_n} est la fonction de répartition de Z_n, qui est croissante). Donc f_n est mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$.

⋆ $X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(1)$, donc X_n est de carré intégrable avec $\mathrm{Var}(X_1) = 1 = \mathbb{E}(X_1)$. D'après le théorème central limite, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z.

Pour $t > 0$, on a donc $\mathbb{P}(Z_n > t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Z > t)$.

⋆ Domination : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{E}(Z_n^2) = \frac{\mathbb{E}((S_n - n)^2)}{n} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n}$. Mais comme les X_k sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S_n) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(Z_n^2) = 1$. En outre, pour tout $t > 0$, d'après l'inégalité de MARKOV :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n > t) &\leqslant \mathbb{P}(|Z_n| > t) \\ &\leqslant \mathbb{P}(Z_n^2 > t^2) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{t^2} \\ &\leqslant \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

En posant $g : t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0;1] \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$, on a $|\mathbb{P}(Z_n > t)| \leqslant g(t)$, g étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 (donc intégrable sur $]0;1]$), et intégrable sur $[1;+\infty[$ (intégrale de RIEMANN convergente : $2 > 1$). Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\mathrm{d}t$. □

Théorème 2. *formule de* STIRLING.

On a :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

PREUVE : On garde les notations précédentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les X_k sont indépendantes et suivent une loi de POISSON de paramètre 1, $S_n \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)$, i.e. $S_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n)$. On a en outre, d'une part :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n > t\sqrt{n}+n\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k>t\sqrt{n}+n}} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{k>t\sqrt{n}+n} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de FUBINI-TONELLI (pour les fonctions positives),

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t<\frac{k-n}{\sqrt{n}}}\mathrm{d}t}_{=0 \text{ si } k<n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\int_0^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\frac{k-n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} k\frac{n^k}{k!} - \sum_{k=n}^{+\infty} n\frac{n^k}{k!}\right) \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k!}\right) \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{k!}\right) \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\frac{n^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

(Cela pouvait aussi se voir par télescopage).
Donc $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)\mathrm{d}t = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$ (en multipliant par n en haut et en bas).
Ensuite, d'autre part, encore grâce au théorème de FUBINI-TONELLI :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathbb{1}_{u\geqslant t}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{u\geqslant t}\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\int_0^{u}\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme, $\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ce qui achève la preuve. $\square$